

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ,
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина



УТВЕРЖДАЮ

Директор
(должность)

Лоцев Г.В.
(ФИО)

3 сентября ____ 2026 г.

Метод конечных элементов

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **6 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 216

в том числе:

аудиторные занятия 82

самостоятельная работа 99,9

Виды контроля в семестрах:

зачет 7

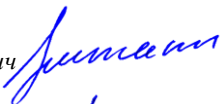
экзамен 8

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	7 (4.1)		8 (4.2)		Итого	
Неделя	18		12			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	16	16	16	16	32	32
Практические	34	34	16	16	50	50
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1	2	2	2,1	2,1
Контактная работа в период экзаменационной сессии			0,3	0,3	0,3	0,3
В том числе инт.	2	2	2	2	4	4
В том числе в форме практ.подготовки	2		2		4	
Итого ауд.	50	50	32	32	82	82
Контактная работа	50,1	50,1	34,3	34,3	84,4	84,4
Сам. работа	57,9	57,9	42	42	99,9	99,9
Часы на контроль			31,7	31,7	31,7	31,7
Итого	108	108	108	108	216	216

Программу составил(и):

к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич



к.т.н, Джаманкулов Азамат Кенешбекович



Рецензент(ы):

к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович



д.т.н, Муслимов Аннас Поясович



Согласовано РОП:

к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич



Рабочая программа дисциплины

Метод конечных элементов

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика

Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Вышей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1

Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.

Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович



ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Метод конечных элементов

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1	Данная дисциплина предназначена для ознакомления студентов с теорией метода конечных элементов.
1.2	,повышение основ знаний, умений и навыков по проектированию и современным методам расчета деталей, сборок и механизмов на прочность, жесткость, устойчивость и колебания при действии статических и динамических нагрузок. приобретение студентами методики построения физических и математических моделей рассчитываемых конструкций освоение практических навыков работы с современными программами CAD+CAE, используя метод конечных элементов (МКЭ). изучение специфики обработки информации в среде прикладных программ; изучение особенностей оформления технологической документации с использованием информационных технологий;

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Цикл (раздел) ООП:		Б1.В.1
2.1	Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
2.1.1	Б1.О.3.13. Уравнения математической физики	
2.1.2	ФТД.01. Основы трехмерного моделирования и прототипирования	
2.1.3	Б1.О.2.01. Введение в высшую математику	
2.1.4	Б1.О.3.02. Теоретическая механика	
2.1.5	Б1.О.3.03. Сопротивление материалов	
2.1.6	Б1.О.3.05. Материаловедение	
2.1.7	Б1.В.1.ДВ.06.01. Специальные главы высшей математики	
2.1.8	Б1.О.3.01. Введение в профессиональную деятельность	
2.1.9	Б1.О.3.16. Вычислительный практикум по теоретической механике	
2.1.10	Б1.В.1.ДВ.07.01. Сопротивление материалов (продвинутый курс)	
2.1.11	Современные языки программирования (Модуль: Введение в информационные технологии)	
2.1.12	Б1.О.2.02. Математический анализ	
2.1.13	Б1.В.1.01. Теория упругости	
2.1.14	Б1.О.3.12. Аналитическая механика	
2.1.15	Б1.В.1.ДВ.05.01. Детали машин и основы конструирования	
2.1.16	Б1.В.1.03. Основы автоматизированного проектирования	
2.1.17	Б1.В.1.ДВ.01.01. Использование современного программного комплекса Компас	
2.1.18	Б1.О.3.08. Использование современного программного комплекса mat lab	
2.1.19	Б1.О.3.10. Вариационное исчисление	
2.1.20	Б1.О.2.07. Начертательная геометрия и инженерная графика	
2.1.21		
2.1.22	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия	
2.1.23	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения	
2.1.24	Б1.О.2.05. Теория вероятностей и математическая статистика	
2.2	Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
2.2.1	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена	
2.2.2	Б2.О.02(Пд). Преддипломная практика	
2.2.3	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы	
2.2.4	Б1.В.1.07. Компьютерный инжиниринг	

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ПК-2: Готовностью выполнять научно-исследовательские работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий, широко распространённых в промышленности систем мирового уровня и экспериментального оборудования для проведения механических испытаний

Знать:

Уровень 1	Знать: ☐ Основные направления и специфику выполнения расчетно-экспериментальных работ с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий в области прикладной механики.
Уровень 2	

Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Уметь: ☐ Выполнять расчетно-экспериментальные работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	Владеть: ☐ методами проведения расчетно-экспериментальных работ в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	Знать:
3.1.1	линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, теории функций комплексной переменной; основные понятия статистической физики, кинетической теории, механики и электродинамики сплошных сред; применения аппарата математического анализа для решения задач оптимизации, построения систем дифференциальных уравнений для описания динамических процессов в технических системах; государственные стандарты правил выполнения электрических схем; параметры и характеристики различных электронных устройств; методы и средства автоматизации схемотехнического моделирования
3.2	Уметь:
3.2.1	выполнять матричные вычисления, решать дифференциальные уравнения, выполнять преобразования выражений с комплексными числами; умения: строить статистические и кинетические модели; проводить анализ и разработку структурных и принципиальных схем современных электронных устройств; составлять схемы замещения различных электронных устройств.
3.3	Владеть:
3.3.1	применения аппарата математического анализа для решения задач оптимизации, построения систем дифференциальных уравнений для описания динамических процессов в технических системах; владеть навыками кинетического, статистического и гидродинамического описания физико-химических процессов; владение навыками работы с электронными измерительными приборами; владение методиками расчета и экспериментального определения параметров электронных устройств, синтезом логических схем.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Постановка задач и построение дискретной модели							

1.1	Расчётная модель и последовательность решения задачи МКЭ 1. Переход от детали или сборки к расчётной области: геометрия, материал, нагрузки, связи и искомые величины. 2. Узлы, элементы и степени свободы; отличие геометрической САД-модели от конечно-элементной модели. 3. Линейная статическая задача упругости: равновесие, малые деформации и закон Гука. 4. Выбор стержневой, плоской, оболочечной или объёмной идеализации на примере кронштейна. 5. Этапы расчёта: подготовка модели, дискретизация, решение и инженерная проверка результатов. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.2	Построение расчётной модели детали и выбор конечных элементов /Пр/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.3	Слабая постановка и аппроксимация перемещений 1. Принцип виртуальных работ для линейной упругости; допустимые перемещения и виртуальные перемещения. 2. Слабая форма одномерной краевой задачи и смысл естественных и существенных граничных условий. 3. Аппроксимация поля перемещений функциями формы; связь узловых значений с полем внутри элемента. 4. Матрицы N, B и D: интерполяция, деформации и упругие свойства материала. 5. Получение элементных уравнений из виртуальных работ; энергетический смысл матрицы жёсткости. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.4	Вывод и программная реализация двухузлового стержневого элемента /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.5	Выбор и обоснование идеализации инженерной детали. Получение слабой формы одномерной задачи и функций формы. /Ср/	7	14	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 2. Одномерные элементы и сборка системы							

2.1	Двухузловой стержневой элемент при растяжении и сжатии 1. Линейные функции формы одномерного элемента и постоянная продольная деформация. 2. Вывод матрицы жёсткости через E, A и длину элемента; проверка размерности и симметрии. 3. Согласованный вектор узловых сил при распределённой продольной нагрузке. 4. Локальная и глобальная системы координат для стержня плоской фермы; преобразование перемещений и сил. 5. Определение продольного усилия и напряжения по узловым перемещениям; пределы применимости элемента. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.2	Матричный расчёт плоской стержневой системы и преобразование координат /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.3	Сборка глобальной системы и наложение граничных условий 1. Таблица связности и нумерация степеней свободы; сборка K и F на примере двух стержней. 2. Заданные нулевые и ненулевые перемещения; исключение известных степеней свободы. 3. Причины вырожденности матрицы: движение как жёсткого тела, механизмы и несвязанные части. 4. Восстановление реакций по исходной системе и проверка общего равновесия. 5. Разреженная структура матрицы, прямой решатель и контроль невязки без явного вычисления обратной матрицы. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.4	Сборка системы двух стержней и восстановление опорных реакций /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.5	Балочные элементы и расчёт плоских рам 1. Гипотезы балки Эйлера — Бернулли: поперечные перемещения, повороты и связь кривизны с изгибом. 2. Эрмитова интерполяция и структура матрицы жёсткости двухузлового элемента изгиба. 3. Эквивалентные узловые силы и моменты для равномерной поперечной нагрузки. 4. Объединение растяжения и изгиба в элементе плоской рамы; преобразование координат. 5. Перемещения, усилия и напряжения в консольной балке; роль сдвига и область применения модели Тимошенко. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.6	Конечно-элементный расчёт консольной балки и плоской рамы /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.7	Сопоставление локальной и глобальной матриц стержня фермы. Проверка сборки системы и обработки заданных перемещений. Сравнение балочной модели с аналитическим решением. /Ср/	7	23	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 3. Плоские элементы и качество решения							
3.1	Плоская упругость и линейный треугольный элемент 1. Плоское напряжённое и плоское деформированное состояния; выбор модели по геометрии и условиям работы. 2. Линейный треугольный элемент CST: функции формы, степени свободы и постоянная матрица В. 3. Матрица упругости D для двух плоских постановок; роль толщины в плоском напряжённом состоянии. 4. Формирование матрицы жёсткости и вектора сил от граничной нагрузки. 5. Расчёт пластины при растяжении: воспроизведение постоянных деформаций и ограничения CST при изгибе. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.2	Расчёт пластины в плоском напряжённом состоянии треугольными элементами /Пр/	7	4	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1	2		Мозговой штурм

3.3	Изопараметрический четырёхугольник и численное интегрирование 1. Естественные координаты и билинейные функции формы четырёхузловое элемента Q4. 2. Отображение эталонного квадрата в физический элемент; якобиан и вычисление производных. 3. Квадратуры Гаусса для интегрирования матрицы жёсткости и вектора нагрузки. 4. Искажение элемента, знак определителя якобиана и влияние геометрии на точность. 5. Полное и пониженное интегрирование; понятия блокировки и паразитных нулевых мод на простых примерах. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.4	Расчёт четырёхузловое элемента и исследование влияния формы сетки /Пр/	7	6	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.5	Сходимость и проверка достоверности конечно-элементного расчёта 1. Источники ошибок: идеализация, исходные данные, дискретизация и решение системы. 2. h- и p-уточнение; построение последовательности сеток и сравнение выбранных величин. 3. Проверка по аналитическому решению, балансу сил и энергии; смысл patch test. 4. Напряжения в точках интегрирования, экстраполяция и усреднение; риск неверного чтения цветовой карты. 5. Концентрация напряжений и сингулярность у острого угла или точечной нагрузки; выбор величины для сравнения. /Лек/	7	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.6	Сеточное исследование детали с концентратором и проверка достоверности расчёта /Пр/	7	6	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.7	Сопоставление двух постановок плоской упругости. Анализ квадратур Гаусса и геометрического качества Q4. Подготовка отчёта о сеточной сходимости и ограничениях модели /Ср/	7	20,9	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.8	Консультации и проведение зачета /КрТО/	7	0,1	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 4. Пространственные и тонкостенные модели							

4.1	Трёхмерные и осесимметричные элементы 1. Пространственная задача упругости: компоненты перемещений, деформаций и напряжений. 2. Линейный тетраэдр и восьмиузловой гексаэдр: число степеней свободы и особенности аппроксимации. 3. Осесимметричная постановка, окружная деформация и условия применимости. 4. Объёмные силы и поверхностное давление; закрепления с учётом симметрии. 5. Выбор между 3D- и осесимметричной моделями на примере толстостенной втулки под давлением. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.2	Сопоставление пространственной и осесимметричной моделей втулки /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1	2		Командная работа
4.3	Пластины и оболочки в расчётах тонкостенных деталей 1. Срединная поверхность, толщина и локальные оси; мембранная и изгибная работа оболочки. 2. Основные различия тонких пластин и моделей с учётом поперечного сдвига без полного вывода матриц. 3. Узловые перемещения и повороты; закрепления кромок и ориентация нормалей. 4. Сдвиговая блокировка и выбор элемента с учётом отношения толщины к характерному размеру. 5. Усилия, моменты и напряжения по толщине; сопоставление оболочечной и объёмной идеализаций панели. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.4	Расчёт тонкой панели оболочечными элементами /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.5	Обоснование выбора объёмной или осесимметричной модели. Проверка ориентации и закреплений оболочечной модели. /Ср/	8	10	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 5. Температурные и нелинейные задачи							

5.1	Температурные деформации и термоупругий расчёт 1. Заданное температурное поле, коэффициент линейного расширения и температура отсчёта. 2. Разделение полных, упругих и температурных деформаций в линейной термоупругости. 3. Эквивалентный температурный вектор нагрузки и реакции при ограниченном расширении стержня. 4. Последовательная передача температур из тепловой задачи в прочностную; согласование сеток и единиц. 5. Свободное расширение и полностью закреплённый стержень как проверочные случаи. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.2	Термоупругий расчёт свободного и закреплённого стержня /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.3	Нелинейное равновесие и итерационное решение 1. Причины нелинейности: изменение геометрии и нелинейное поведение материала; выбор модели задачи. 2. Внешние и внутренние силы, вектор невязки и касательная матрица жёсткости. 3. Шаги нагружения и итерации Ньютона на скалярном примере нелинейной пружины. 4. Критерии сходимости по силам и перемещениям, уменьшение шага и признаки расходимости. 5. Смысл малой упругопластической деформации и больших перемещений; требования к исходным данным без вывода специальных алгоритмов. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.4	Итерационное решение нелинейного уравнения равновесия /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			

5.5	Контактное взаимодействие деталей 1. Односторонний контакт без трения: зазор, непроникновение и нормальное контактное давление. 2. Открытое и закрытое состояния контакта; изменение набора активных ограничений. 3. Штрафной подход: компромисс между проникновением и обусловленностью системы. 4. Контактная сетка, начальный зазор, нормали и достаточность закреплений. 5. Проверка реакции и контактного давления при сжатии двух деталей; отличие контакта от жёсткого связывания. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.6	Расчёт нормального контакта двух деталей без трения /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.7	Аналитическая проверка температурных деформаций и реакций. Исследование влияния шага нагрузки на итерационное решение. Анализ влияния контактной жёсткости и начального зазора. /Ср/	8	16	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 6. Устойчивость и динамика конструкций							
6.1	Линейный анализ потери устойчивости 1. Начальное напряжённое состояние и геометрическая жёсткость конструкции. 2. Задача на собственные значения для коэффициента критической нагрузки; зависимость знака от принятой записи уравнений. 3. Формы потери устойчивости и их условная амплитуда. 4. Сравнение критической силы с формулой Эйлера для идеального стержня. 5. Ограничения линейной оценки: начальные несовершенства, пластичность и необходимость нелинейного уточнения. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.2	Определение критической нагрузки идеального сжатого стержня /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			

6.3	Собственные частоты и формы колебаний 1. Уравнение свободных колебаний и обобщённая задача $K\varphi = \omega^2 M\varphi$. 2. Согласованная и сосредоточенная матрицы масс; плотность материала и единицы измерения. 3. Частота в герцах, круговая частота и нормировка собственных форм. 4. Нулевые моды свободного тела и проверка корректности связей. 5. Чувствительность частот к жёсткости, массе и сетке; сопоставление частоты балки с приближённой оценкой. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.4	Определение собственных частот и форм колебаний конструкции /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.5	Переходный динамический расчёт и анализ результатов 1. Уравнение $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$, начальные условия и задание нагрузки во времени. 2. Физический смысл демпфирования; пропорциональная модель и ограничения её применения. 3. Неявная схема Ньюмарка: смысл параметров и выбор временного шага для разрешения отклика. 4. Сопоставление прямого интегрирования и модального разложения в линейной задаче. 5. Контроль временной сходимости и энергии; состав воспроизводимого отчёта о динамическом расчёте. /Лек/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.6	Переходный отклик линейной системы на заданную нагрузку /Пр/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.7	Сравнение численной критической силы с формулой Эйлера. Исследование влияния сетки и массы на собственные частоты. Проверка временной сходимости и оформление динамического расчёта /Ср/	8	16	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.8	Консультации и прием курсовых работ /КрТО/	8	2	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			
6.9	Консультации и прием экзамена /КрЭк/	8	0,3	ПК-2	Л1.1Л2.1Л3.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

1. Контрольные вопросы для текущего контроля

7-й семестр

1. В чём заключается идея метода конечных элементов? Как непрерывная механическая система заменяется дискретной моделью?
2. Что представляют собой узел, конечный элемент, степень свободы и таблица связности?
3. Какие исходные данные необходимы для построения расчётной модели детали или конструкции?
4. Как выбирают между стержневой, балочной, плоской, оболочечной и объёмной моделями?
5. Какие предположения принимаются при решении линейной статической задачи упругости?
6. Как формулируется принцип виртуальных работ и как он используется при построении уравнений МКЭ?
7. Что такое слабая форма краевой задачи? Чем различаются существенные и естественные граничные условия?
8. Каково назначение функций формы? Какие требования предъявляются к аппроксимации перемещений?
9. Каков физический смысл матриц функций формы, деформаций и упругих свойств материала?
10. Как выводится матрица жёсткости двухузловое стержневого элемента?
11. Как преобразуются перемещения, силы и матрица жёсткости элемента при переходе из локальной системы координат в глобальную?
12. Как выполняются сборка глобальной системы, учёт заданных перемещений и восстановление опорных реакций?
13. Почему глобальная матрица жёсткости может оказаться вырожденной? Как выявить недостаточные закрепления и механизмы?
14. Какие узловые неизвестные используются в балочном элементе? Чем различаются модели Эйлера — Бернулли и Тимошенко?
15. Чем отличаются плоское напряжённое и плоское деформированное состояния? Каковы особенности элементов CST и Q4?
16. Как проверяют качество сетки и сходимость решения? Чем отличаются концентрация напряжений и сингулярность?

****8-й семестр****

17. Какие компоненты перемещений, деформаций и напряжений учитываются в пространственной задаче упругости?
18. Каковы особенности применения тетраэдральных и гексаэдральных конечных элементов?
19. При каких условиях допускается осесимметричная постановка? Почему симметрии геометрии недостаточно для её применения?
20. Какие величины характеризуют оболочечную модель? Как влияют толщина, ориентация нормалей и закрепление кромок на результат?
21. Как связаны полная, упругая и температурная деформации? Как задаётся температура ненапряжённого состояния?
22. Почему свободное температурное расширение однородного стержня не вызывает продольных напряжений, а ограниченное расширение вызывает?
23. Чем различаются геометрическая, физическая и контактная нелинейности?
24. Как формируются вектор невязки и касательная матрица жёсткости в нелинейной задаче?
25. Как выполняется шаг метода Ньютона? Чем различаются шаг нагружения и итерация равновесия?
26. Как формулируются условия одностороннего контакта без трения? Чем контакт отличается от жёсткого связывания поверхностей?
27. Как штрафной параметр влияет на проникновение контактирующих поверхностей и обусловленность системы?
28. Каков смысл геометрической матрицы жёсткости, коэффициента критической нагрузки и формы потери устойчивости?
29. Почему линейный расчёт устойчивости идеальной конструкции не определяет автоматически несущую способность реальной детали?
30. Как формируются согласованная и сосредоточенная матрицы масс? Что характеризуют собственные частоты и формы колебаний?
31. Какие исходные и начальные условия необходимы для переходного динамического расчёта? Как учитывается демпфирование?
32. Как проверяется сходимость по временному шагу? Почему устойчивость численной схемы не гарантирует точности динамического отклика?

****2. Задания для текущего контроля****

****Задание 1. Построение расчётной модели****

Для консольного кронштейна, нагруженного силой на свободном конце:

- предложить стержневую, оболочечную или объёмную идеализацию;
- определить необходимые свойства материала;
- показать нагрузки и закрепления на эскизе;
- указать искомые перемещения и напряжения;
- обосновать принятые упрощения.

Геометрический вариант кронштейна задаётся преподавателем.

****Задание 2. Матрица жёсткости стержневого элемента****

Для двухузловое стержня заданы:

- длина $(L=500)$ мм;
- площадь сечения $(A=200)$ мм²;
- модуль упругости $(E=210\,000)$ МПа.

Получить функции формы, матрицу деформаций и матрицу жёсткости элемента. Проверить размерности, симметрию матрицы и возможность перемещения элемента как жёсткого тела.

****Задание 3. Сборка и решение системы****

Два соосных стержня соединены последовательно. Длина каждого — 500 мм, модуль упругости — 210 000 МПа. Площади сечений составляют 200 и 100 мм². Левый конец закреплён, к правому приложена растягивающая сила 10 000 Н.

Составить глобальную матрицу жёсткости, учесть закрепление, определить узловые перемещения, напряжения и опорную реакцию. Проверить равновесие системы.

****Задание 4. Исследование сеточной сходимости****

Для трёх последовательно сгущённых сеток получены значения перемещения одной точки: 0,800; 0,880; 0,900 мм.

Определить относительные изменения результата между соседними сетками, принимая за знаменатель значение на более мелкой сетке. Оценить стабилизацию перемещения при учебном критерии 3 %. Объяснить, какие дополнительные проверки необходимы для вывода о достоверности расчёта.

****Задание 5. Температурное нагружение****

Для стержня заданы:

- длина 1000 мм;
- площадь сечения 200 мм²;
- модуль упругости 210 000 МПа;
- коэффициент линейного расширения $(12 \cdot 10^{-6})$ К⁻¹;
- равномерное повышение температуры на 50 К.

Определить удлинение при свободном расширении. Рассчитать напряжение и реакции при закреплении обоих концов. Объяснить различие результатов.

****Задание 6. Итерация нелинейного решения****

Внутренняя сила нелинейной пружины определяется зависимостью

$$F_{\text{н}}(u) = ku + \beta u^3,$$

где $(k=100)$ Н/мм, $(\beta=10)$ Н/мм³. Внешняя сила равна 200 Н.

При начальном приближении $(u_0=1)$ мм определить невязку, касательную жёсткость и выполнить одну итерацию метода Ньютона. Проверить, достигнут ли относительный допуск по невязке 1 %.

****Задание 7. Линейная устойчивость****

Для идеального стержня с шарнирным закреплением обоих концов заданы $(L=2000)$ мм, $(E=210\,000)$ МПа, $(I=8 \cdot 10^6)$ мм⁴.

Определить критическую силу по формуле Эйлера. Найти коэффициент критической нагрузки относительно эталонной сжимающей силы 100 000 Н. Указать ограничения такой оценки.

****Задание 8. Собственные колебания****

Для системы заданы матрицы:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ кг},$$

```

\mathbf{K}=
\begin{bmatrix}
4000&-2000\\
-2000&2000
\end{bmatrix}\text{ Н/м}.
\]

```

Составить характеристическое уравнение, определить собственные круговые частоты и перевести их в герцы. Объяснить физический смысл собственных форм и произвольность их амплитуды.

****3. Контрольные вопросы для промежуточной аттестации****

1. Последовательность решения инженерной задачи методом конечных элементов: от физической модели до проверенного результата.
2. Принцип виртуальных работ и получение конечно-элементных уравнений в перемещениях.
3. Функции формы и требования к аппроксимации. Связь узловых перемещений с деформациями и напряжениями.
4. Вывод матрицы жёсткости и вектора нагрузки двухузлового стержневого элемента.
5. Локальные и глобальные координаты. Построение модели плоской фермы.
6. Сборка глобальной системы, задание нулевых и ненулевых перемещений, определение реакций.
7. Балочные элементы и расчёт рам. Границы применимости различных балочных моделей.
8. Плоская упругость: выбор постановки, матрица упругости, особенности треугольных и четырёхугольных элементов.
9. Изопараметрическое отображение, матрица Якоби и численное интегрирование.
10. Влияние размера, порядка и искажения конечных элементов на точность и вычислительные затраты.
11. Пространственные, осесимметричные и оболочечные модели: условия выбора и особенности интерпретации результатов.
12. Термоупругая задача: температурные деформации, ограничение расширения и проверочные случаи.
13. Нелинейное равновесие: невязка, касательная жёсткость, шаги нагружения и критерии сходимости.
14. Контакт без трения: односторонние ограничения, штрафной подход и проверка контактного решения.
15. Линейная потеря устойчивости: предварительное нагружение, критические коэффициенты и ограничения модели.
16. Собственные колебания: матрицы жёсткости и масс, собственные значения, формы и нормировка.
17. Переходные динамические процессы: начальные условия, демпфирование, прямое интегрирование и модальное разложение.
18. Верификация и валидация. Проверка равновесия, сопоставление с эталоном, сеточная и временная сходимость, воспроизводимость расчёта.

****4. Комплексные задания для промежуточной аттестации****

****Задание 1. Конечно-элементный расчёт стержневой системы****

Используя исходные данные задания 3 текущего контроля:

1. Вывести элементные матрицы жёсткости.
2. Представить таблицу связности и собрать глобальную систему.
3. Наложить граничные условия и определить перемещения.
4. Восстановить усилия, напряжения и реакцию.
5. Сопоставить результат с аналитическим расчётом последовательного соединения стержней.
6. Объяснить, как изменится решение при увеличении площади второго стержня вдвое.

****Задание 2. Расчёт и проверка балочной модели****

Консольная балка имеет длину 1000 мм, модуль упругости 210 000 МПа и момент инерции сечения $(8 \cdot 10^6)$ мм⁴. К свободному концу приложена поперечная сила 1000 Н. Расстояние до крайнего волокна сечения — 20 мм.

Требуется:

1. Построить расчётную схему с указанием степеней свободы.
2. Составить уравнения для одного балочного элемента Эйлера — Бернулли.
3. Определить прогиб и поворот свободного конца.
4. Найти опорные реакции, максимальный изгибающий момент и напряжение.
5. Проверить результат по аналитическим зависимостям.
6. Указать условия, при которых потребуется более сложная модель балки.

****Задание 3. Пластина с отверстием****

Рассмотреть прямоугольную пластину длиной 200 мм, шириной 100 мм и толщиной 2 мм с центральным круглым отверстием радиусом 10 мм. Материал: $(E=210\,000)$ МПа, $(\nu=0{,}3)$. На торцах пластины действует равномерное растягивающее напряжение 10 МПа вдоль её длины.

Требуется:

1. Обосновать плоское напряжённое состояние.
2. Выбрать тип конечных элементов и способ исключения движений жёсткого тела.
3. Предложить сетку с локальным уточнением у отверстия.
4. Задать не менее трёх сеточных вариантов.
5. Определить перемещение и напряжение в заранее выбранных точках, сохраняя их положение при изменении сетки.
6. Проверить баланс нагрузок и сходимость.
7. Объяснить ограничения сравнения с решением для бесконечной пластины.

Задание выполняется на компьютере либо защищается по заранее подготовленному расчёту.

****Задание 4. Термоупругий расчёт составного стержня****

Два соосных стержня соединены последовательно и закреплены по крайним концам. Для каждого длина составляет 500 мм, площадь сечения — 200 мм².

Свойства первого материала:

$E_1 = 210\,000 \text{ МПа}$,
 $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$.

Свойства второго материала:

$E_2 = 70\,000 \text{ МПа}$,
 $\alpha_2 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$.

Температура обоих стержней равномерно повышается на 50 К относительно ненапряжённого состояния.

Требуется составить конечно-элементные уравнения с температурной нагрузкой, определить перемещение промежуточного узла, напряжения и реакции. Проверить равновесие и совместность деформаций. Изгиб и потерю устойчивости в этой задаче не учитывать.

****Задание 5. Устойчивость сжатого стержня****

Для стержня из задания 7 текущего контроля:

1. Построить балочную конечно-элементную модель.
2. Задать эталонную сжимающую нагрузку и шарнирные закрепления.
3. Определить первый положительный коэффициент критической нагрузки и соответствующую форму.
4. Исследовать изменение критической силы при сгущении сетки.
5. Сопоставить результат с формулой Эйлера.
6. Объяснить влияние начальной кривизны и отличие линейной задачи на собственные значения от нелинейного расчёта устойчивости.

****Задание 6. Частоты и переходный динамический отклик****

Используя матрицы системы из задания 8 текущего контроля:

1. Определить две собственные частоты и соответствующие формы.
2. Пояснить выбранный способ нормировки форм.
3. Записать уравнения движения при приложении к второй массе постоянной силы 10 Н, внезапно включаемой в момент $t=0$.
4. Принять нулевые начальные перемещения и скорости, демпфирование отсутствующим.
5. Предложить алгоритм численного решения на интервале 0–1 с.
6. Объяснить порядок проверки временной сходимости и сопоставления с решением методом модального разложения.

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Предлагаемые темы курсовых работ по дисциплине «Метод конечных элементов» для направления «Прикладная механика», профиля «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг»:

1. Конечно-элементный расчёт ступенчатого стержня при растяжении и сжатии с проверкой по аналитическому решению.
2. Разработка программы расчёта плоской фермы методом конечных элементов.
3. Исследование напряжённо-деформированного состояния консольной балки при различных видах нагружения.

4. Конечно-элементный расчёт плоской рамы и исследование влияния жёсткости её элементов на перемещения.
 5. Исследование концентрации напряжений в пластине с круглым отверстием.
 6. Влияние формы отверстия на распределение напряжений в растягиваемой пластине.
 7. Конечно-элементный анализ кронштейна при различных способах закрепления.
 8. Исследование влияния радиуса галтели на концентрацию напряжений в ступенчатой детали.
 9. Сравнение треугольных и четырёхугольных конечных элементов при решении плоской задачи упругости.
 10. Исследование влияния размера и порядка конечных элементов на точность расчёта инженерной детали.
 11. Сопоставление балочной и объёмной конечно-элементных моделей при расчёте изгиба балки.
 12. Расчёт толстостенной цилиндрической втулки под внутренним давлением в осесимметричной и пространственной постановках.
 13. Конечно-элементный расчёт тонкой пластины при поперечном нагружении.
 14. Исследование влияния рёбер жёсткости на прогибы и напряжения тонкостенной панели.
 15. Термоупругий расчёт стержневой конструкции при различных условиях ограничения температурного расширения.
 16. Исследование температурных напряжений в составной детали из материалов с различными коэффициентами теплового расширения.
 17. Определение критической нагрузки сжатого стержня методом конечных элементов при различных условиях закрепления.
 18. Определение собственных частот и форм колебаний балки с сосредоточенной массой.
 19. Исследование переходных колебаний конструкции при внезапном приложении нагрузки.
 20. Конечно-элементный анализ контактного взаимодействия двух упругих деталей без трения.
- Для каждой темы целесообразно предусмотреть обоснование расчётной модели, исследование сеточной сходимости и проверку результата по аналитическому решению либо проверочной задаче. Геометрию, материал и параметры нагружения можно варьировать для формирования индивидуальных заданий.

5.3. Фонд оценочных средств

1 Основания и условия применения

Исходный документ — аннотация КРСУ от 3 сентября 2026 г.: 32 часа лекций, 50 часов практических занятий и 99,9 часа самостоятельной работы. В аннотации указана компетенция ПК-2, связанная с выполнением научно-исследовательских и расчётно-экспериментальных работ в прикладной механике с использованием вычислительных методов и компьютерных технологий.

ФОС оценивает вычислительную составляющую ПК-2. Практическая работа на механическом испытательном оборудовании и использование высокопроизводительной системы не подтверждены исходными данными и этим комплектом полностью не оцениваются. Лабораторные испытания в часы дисциплины не добавляются.

Проектные допущения: зачёт по темам 1–8 в 7-м семестре; экзамен по дисциплине в 8-м семестре с обязательной проверкой тем 9–16 и базовых методов. Формы аттестации, продолжительность, пороги и правила пересдачи должны быть согласованы с учебным планом и локальными актами КРСУ. Приведённые ниже правила не являются утверждённой локальной балльно-рейтинговой системой.

2 Оцениваемые результаты и структура контроля

Ниже введены рабочие обозначения результатов Р1–Р4. Они служат для связи заданий с оцениванием и не заменяют официальные индикаторы ПК-2.

Код Наблюдаемое действие Средства проверки

Р1 Обосновывает идеализацию, материал, нагрузки, связи и тип элемента Вопросы В1–В6, В13–В21, В25–В42; РР1, РР6–РР7, РР9–РР14; 35–37

Р2 Выводит элементные уравнения, собирает систему и применяет граничные условия В4–В15, В19–В21; РР2–РР5, РР7; 31–32; КР1

Р3 Выполняет расчёт статики, термоупругости, контакта, устойчивости и динамики РР4–РР16; 31–38; КР2; экзаменационная задача

Р4 Проверяет равновесие и сходимость, объясняет результат и ограничения модели В22–В24, В42–В48; РР8, РР14–РР16; 33, 35, 38; РИЗ

Сокращения: В — контрольный вопрос; З — расчётное задание; РР — практическая работа; КР — контрольная работа; РИЗ — расчётно-исследовательское задание. Номера РР соответствуют документу с учебно-методическими материалами.

Темы и семестр Текущий контроль Промежуточная проверка

Лекции 1–4, 7 семестр Опрос, тест Т1–Т4, РР1–РР4, 31, КР1 Вопросы В1–В12; 31

Лекции 5–8, 7 семестр Т5–Т8, РР5–РР8, 32–33, РИЗ В13–В24; 32–33

Лекции 9–13, 8 семестр Т9–Т13, РР9–РР13, 34–36, КР2 В25–В39; 34–36

Лекции 14–16, 8 семестр Т14–Т16, РР14–РР16, 37–38 В40–В48; 37–38

3 Перечень оценочных средств

Устный опрос по банку В1–В48.

Тематический тест Т1–Т16 с одним верным ответом.

Расчётные задания 31–38 с проверочными ответами.

Отчёт и индивидуальная защита РР1–РР16.

Контрольные работы КР1 и КР2.

РИЗ по сеточной сходимости и воспроизводимости расчёта.

Зачётное собеседование и экзаменационные билеты по предложенной схеме.

4 Контрольные вопросы для текущего контроля и промежуточной аттестации

Лекция 1 Расчётная модель и последовательность решения задачи МКЭ

- B1. Какие допущения превращают реальную деталь в линейную статическую модель?
 B2. Чем отличаются узел, элемент и степень свободы?
 B3. Как обосновать выбор стержневой, плоской или объёмной модели кронштейна?
 Лекция 2 Слабая постановка и аппроксимация перемещений
 B4. Как принцип виртуальных работ приводит к слабой форме одномерной задачи?
 B5. Каков смысл матриц N , B и D и каковы их размерности для стержня?
 B6. Чем различаются существенные и естественные граничные условия?
 Лекция 3 Двухузловой стержневой элемент при растяжении и сжатии
 B7. Выведите матрицу жёсткости линейного стержневого элемента.
 B8. Как получить согласованные узловые силы от постоянной распределённой продольной нагрузки?
 B9. Как преобразуется матрица стержня плоской фермы из локальных координат в глобальные?
 Лекция 4 Сборка глобальной системы и наложение граничных условий
 B10. Как собирается глобальная матрица по таблице связности?
 B11. Как учесть заданное ненулевое перемещение и восстановить реакции?
 B12. Почему система может оказаться вырожденной и как проверить закрепления?
 Лекция 5 Балочные элементы и расчёт плоских рам
 B13. Почему у балочного элемента имеются повороты и эрмитовы функции формы?
 B14. Как формируется вектор сил от распределённой поперечной нагрузки?
 B15. Когда балка Эйлера — Бернулли недостаточна и требуется учёт сдвига?
 Лекция 6 Плоская упругость и линейный треугольный элемент
 B16. Как выбрать между плоским напряжённым и плоским деформированным состояниями?
 B17. Почему деформации в CST постоянны внутри элемента?
 B18. Как толщина входит в матрицу жёсткости плоской пластины?
 Лекция 7 Изопараметрический четырёхугольник и численное интегрирование
 B19. Как устроено изопараметрическое отображение $Q4$ и зачем нужен якобиан?
 B20. Как выбирают квадратуру Гаусса и чем опасен неположительный якобиан?
 B21. Что означают блокировка и паразитные нулевые моды?
 Лекция 8 Сходимость и проверка достоверности конечно-элементного расчёта
 B22. Чем различаются верификация расчёта и валидация модели?
 B23. Как построить исследование сеточной сходимости и выбрать контролируемую величину?
 B24. Почему максимальное напряжение у острого угла может возрасти при сгущении сетки?
 Лекция 9 Трёхмерные и осесимметричные элементы
 B25. При каких условиях задача допускает осесимметричную постановку?
 B26. Как различаются тетраэдральные и гексаэдральные элементы по аппроксимации?
 B27. Почему симметрия геометрии сама по себе недостаточна для сокращения модели?
 Лекция 10 Пластины и оболочки в расчётах тонкостенных деталей
 B28. Какие величины задают на срединной поверхности оболочки?
 B29. Как проверить нормали, толщину и закрепления оболочечной модели?
 B30. Как отличить мембранные усилия и изгибные моменты от напряжений?
 Лекция 11 Температурные деформации и термоупругий расчёт
 B31. Как связаны полная, упругая и температурная деформации?
 B32. Почему свободно нагреваемый стержень может иметь нулевые напряжения?
 B33. Как проверить реакции полностью закреплённого нагретого стержня?
 Лекция 12 Нелинейное равновесие и итерационное решение
 B34. Как различаются геометрическая и физическая нелинейности?
 B35. Как построить шаг метода Ньютона для уравнения равновесия?
 B36. Почему сходимость итераций не доказывает физическую достоверность модели?
 Лекция 13 Контактное взаимодействие деталей
 B37. Как сформулировать условия одностороннего контакта без трения?
 B38. Как штрафной параметр влияет на проникновение и обусловленность?
 B39. Чем контакт отличается от жёсткого связывания соприкасающихся поверхностей?
 Лекция 14 Линейный анализ потери устойчивости
 B40. Что означают коэффициент критической нагрузки и форма потери устойчивости?
 B41. Какие условия необходимы для сравнения с формулой Эйлера?
 B42. Почему линейный коэффициент потери устойчивости нельзя автоматически считать запасом реальной детали?
 Лекция 15 Собственные частоты и формы колебаний
 B43. Как получить уравнение $K\phi = \omega^2 M\phi$ и перевести ω в герцы?
 B44. Чем различаются согласованная и сосредоточенная матрицы масс?
 B45. О чём свидетельствуют нулевые частоты в модели свободного тела или закреплённой конструкции?
 Лекция 16 Переходный динамический расчёт и анализ результатов
 B46. Какие данные нужны для расчёта переходного процесса?
 B47. Как различаются сходимость по сетке и сходимость по временному шагу?
 B48. Почему устойчивость схемы Ньюмарка не гарантирует точности временного отклика?
 5 Типовые расчётные задания и проверочные ответы
 Все числа ниже заданы как учебные данные. Если не оговорено иное, в 31–34 и 37 используются N , мм и МПа; в 38 — N , м, кг и с. Проверочные ответы предназначены преподавателю. В выдаваемой студенту копии этот фрагмент каждого задания следует скрыть.
 31 Сборка системы двух стержней

Два соосных стержня соединены последовательно: узлы 1–2–3, $u_1 = 0$. Для обоих $E = 210000$ МПа и $L = 500$ мм; $A_1 = 200$ мм², $A_2 = 100$ мм². В узле 3 приложена сила $F = 10000$ Н вдоль положительной оси. Составьте элементные и глобальную матрицы, найдите u_2 , u_3 , усилия, напряжения и реакцию. Проверьте равновесие.

Проверочный ответ. $k_1 = 84000$ Н/мм, $k_2 = 42000$ Н/мм. $K = [[84000, -84000, 0], [-84000, 126000, -42000], [0, -42000, 42000]]$ Н/мм. $u_2 = 0,119048$ мм, $u_3 = 0,357143$ мм. $N_1 = N_2 = 10000$ Н; $\sigma_1 = 50$ МПа, $\sigma_2 = 100$ МПа; $R_1 = -10000$ Н. Реакция вычисляется по исходным K и F .

Связь с содержанием. Р1–Р4; лекции 3–4; ПР4.

32 Балочная модель и аналитическая проверка

Консоль Эйлера — Бернулли длиной $L = 1000$ мм имеет $E = 210000$ МПа, $I = 8 \cdot 10^6$ мм⁴ и расстояние до крайнего волокна $y = 20$ мм. На свободном конце действует поперечная сила $F = 1000$ Н. Определите модуль прогиба и поворота конца, максимальные изгибающий момент и напряжение; поясните проверку конечно-элементного решения. Примите малые перемещения, постоянные E и I .

Проверочный ответ. $|v(L)| = FL^3/(3EI) = 0,198413$ мм; $|\theta(L)| = FL^2/(2EI) = 2,97619 \cdot 10^{-4}$ рад. $|M_{\max}| = FL = 10^6$ Н·мм; $|\sigma_{\max}| = M_{\max} \cdot y/I = 2,5$ МПа. Поперечная реакция по модулю 1000 Н, момент реакции 10^6 Н·мм. Один стандартный кубический балочный элемент воспроизводит узловые перемещения этого случая с концевой силой.

Связь с содержанием. Р2–Р4; лекции 5 и 8; ПР5.

33 Интерпретация сеточной сходимости

Для одной и той же линейной модели кронштейна получены результаты трёх последовательно сгущённых сеток. Число элементов: 1000, 4000, 16000. Перемещение точки контроля: 0,800; 0,880; 0,900 мм. Напряжение в фиксированной точке вдали от угла: 150; 158; 160 МПа. Максимальное напряжение у идеально острого закреплённого угла: 210; 295; 418 МПа. Вычислите относительное изменение двух первых величин для последних двух сеток по отношению к последней сетке. Объясните, что можно утверждать о достоверности.

Проверочный ответ. Изменение перемещения: $|0,900 - 0,880|/0,900 = 2,22\%$. Изменение напряжения в точке: $|160 - 158|/160 = 1,25\%$. При учебном пороге 3 % эти величины стабилизировались на последнем переходе. Это не доказательство достижения точного решения и не валидация модели. Пик у угла не стабилизируется; необходимо исследовать сингулярность, физическую геометрию закрепления и выбирать обоснованный критерий вне сингулярной точки.

Связь с содержанием. Р1, Р4; лекция 8; ПР8 и РИЗ.

34 Температурные деформации и реакции

Однородный стержень: $L = 1000$ мм, $A = 200$ мм², $E = 210000$ МПа, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Температура равномерно повышается на 50 К относительно ненапряжённого состояния. Найдите удлинение и напряжение при одном закреплённом и одном свободном конце; затем напряжение и опорные реакции при закреплении обоих концов. Продольная ось направлена слева направо.

Проверочный ответ. При свободном расширении $\Delta L = \alpha \Delta T \cdot L = 0,6$ мм, $\sigma = 0$. При двух закреплении полная продольная деформация нулевая, $\sigma = -E\alpha \Delta T = -126$ МПа, $N = -25200$ Н. Реакции на стержень: слева +25200 Н, справа -25200 Н.

Стержень сжат; знаки реакций определяются принятой осью.

Связь с содержанием. Р1, Р3–Р4; лекция 11; ПР11.

35 Один шаг нелинейного решения

Для нелинейной пружины внутреннего усилия $F_{\text{int}}(u) = k \cdot u + \beta \cdot u^3$, где $k = 100$ Н/мм, $\beta = 10$ Н/мм³; внешняя сила $F_{\text{ext}} = 200$ Н. Примите $u_0 = 1$ мм. Используя $r = F_{\text{ext}} - F_{\text{int}}$ и $K_t = dF_{\text{int}}/du$, выполните один шаг Ньютона. Найдите новую невязку и оцените её соответствие учебному относительному допуску 1 % от F_{ext} .

Проверочный ответ. $F_{\text{int}}(u_0) = 110$ Н; $r_0 = 90$ Н; $K_t(u_0) = 130$ Н/мм; $\Delta u_0 = 90/130 = 0,692308$ мм; $u_1 = 1,692308$ мм. $F_{\text{int}}(u_1) \approx 217,6969$ Н; $r_1 \approx -17,6969$ Н. $|r_1|/F_{\text{ext}} \approx 8,85\%$; требуются дальнейшие итерации. Касательная жёсткость пересчитывается на каждом следующем шаге.

Связь с содержанием. Р3–Р4; лекция 12; ПР12.

36 Проверка штрафного контакта

Жёсткий плоский штамп прижат к линейно-упругой детали без трения силой 1000 Н. Для учебной проверки примите равномерное давление на известной площадке 100 мм². Штрафная связь задана законом $p = k_n \cdot \delta$ при проникновении $\delta \geq 0$; $k_n = 1000$ Н/мм³. Найдите среднее давление и проникновение. Что изменится при десятикратном увеличении k_n и почему реальная контактная модель требует дополнительной проверки?

Проверочный ответ. Среднее давление 10 Н/мм² = 10 МПа; $\delta = p/k_n = 0,01$ мм. При $k_n = 10000$ Н/мм³ и той же фиксированной равномерной площадке $\delta = 0,001$ мм. В реальной модели распределение давления и площадь контакта могут изменяться; рост штрафной жёсткости способен ухудшить обусловленность. Проверяются нормали, состояние контакта, суммарная реакция и чувствительность к параметру.

Связь с содержанием. Р1, Р3–Р4; лекция 13; ПР13.

37 Критическая сила идеального стержня

Идеальный шарнирно опёртый с двух концов стержень длиной $L = 2000$ мм имеет $E = 210000$ МПа, $I = 8 \cdot 10^6$ мм⁴. Материал остаётся линейно-упругим. Найдите силу Эйлера и коэффициент критической нагрузки относительно эталонной сжимающей силы $P_0 = 100000$ Н. Поясните физический смысл формы потери устойчивости.

Проверочный ответ. $P_{\text{cr}} = \pi^2 EI/L^2 \approx 4,14523 \cdot 10^6$ Н; $\lambda_{\text{cr}} = P_{\text{cr}}/P_0 \approx 41,4523$. Абсолютная амплитуда линейной собственной формы произвольна. Полученная оценка относится к идеальному упругому стержню; без площади, прочностных свойств и учёта несовершенств она не устанавливает реальную несущую способность.

Связь с содержанием. Р1, Р3–Р4; лекция 14; ПР14.

38 Частоты и временная проверка

Двухмассовая линейная система: $m_1 = m_2 = 2$ кг, $M = \text{diag}(2, 2)$ кг; $K = [[4000, -2000], [-2000, 2000]]$ Н/м. Найдите собственные круговые частоты и частоты в герцах. Для дополнительной проверки временной схемы рассмотрите отдельную одномассовую систему: $m = 2$ кг, $k = 2000$ Н/м, демпфирование отсутствует, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$, с $t = 0$ действует постоянная сила 10 Н. Запишите точный отклик и предложите порядок сравнения с численным решением.

Проверочный ответ. $\omega^2 = 1000 \cdot (3 \pm \sqrt{5})/2$ с⁻²; $\omega_1 \approx 19,544$ с⁻¹, $\omega_2 \approx 51,167$ с⁻¹; $f_1 \approx 3,1105$ Гц, $f_2 \approx 8,1434$ Гц. Для

одномассовой задачи $\omega_0 = \sqrt{1000} \approx 31,6228 \text{ с}^{-1}$, $u(t) = 0,005 \cdot [1 - \cos(\omega_0 t)] \text{ м}$. Сравнивают одинаковые моменты времени, амплитуду и фазу при Δt , $\Delta t/2$ и $\Delta t/4$; уменьшение ошибки проверяют на фиксированном интервале, например 0–1 с. Связь с содержанием. РЗ–Р4; лекции 15–16; ПР15–ПР16.

6 Тестовые задания

Выберите один верный ответ. Один верный ответ — 1 балл, неверный ответ или отсутствие ответа — 0 баллов. Всего 16 баллов; частичное оценивание не применяется.

T1

В линейной статической модели при постоянных связях и материале удвоение нагрузки приводит к...

А. удвоению перемещений; Б. четырёхкратному росту перемещений; В. неизменным перемещениям.

T2

Матрица В связывает...

А. напряжения и температуры; Б. узловые перемещения и деформации; В. нагрузки и плотность.

T3

Продольная жёсткость двухузлового стержня постоянного сечения равна...

А. $EA \cdot L$; Б. EI/L^3 ; В. EA/L .

T4

Ненулевая реакция в узле с заданным перемещением вычисляется...

А. по исходным К и F после решения; Б. только по изменённой единичной строке матрицы; В. как всегда нулевой остаток.

T5

Классический элемент изгиба Эйлера — Бернулли в плоскости имеет в каждом узле...

А. только одно осевое перемещение; Б. поперечное перемещение и поворот; В. только три температуры.

T6

Для плоского напряжённого состояния тонкой пластины вне особенностей нагрузки принимают...

А. $\epsilon_z = 0$ при произвольном σ_z ; Б. все деформации нулевыми; В. $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

T7

Неположительный определитель якобиана в используемой ориентации элемента требует...

А. проверки нумерации и геометрии элемента; Б. автоматического принятия результата; В. только изменения цветовой шкалы.

T8

Верификация расчёта прежде всего проверяет...

А. сходство изображения с фотографией; Б. корректность численного решения выбранной задачи; В. только наличие лицензии.

T9

Осесимметричная модель применима при...

А. любой круглой детали независимо от нагрузки; Б. одной плоскости симметрии; В. осесимметричных геометрии, свойствах, нагрузках и связях.

T10

Изменение нормали оболочки может изменить...

А. интерпретацию верхней и нижней поверхностей и направления давления; Б. модуль упругости материала автоматически; В. физические единицы времени.

T11

Равномерно нагретый свободно расширяющийся однородный стержень имеет...

А. обязательно напряжение $E\alpha\Delta T$; Б. температурную деформацию без осевого напряжения; В. нулевую температурную деформацию.

T12

В методе Ньютона поправку находят из уравнения...

А. $M\Delta u = 0$ при любой задаче; Б. $\Delta u = r$ без размерных коэффициентов; В. $K\Delta u = r$.

T13

Контакт без трения позволяет передавать...

А. сжимающую нормальную реакцию при активном контакте; Б. произвольное касательное усилие сцепления; В. растягивающую реакцию через раскрытый зазор.

T14

Линейный коэффициент критической нагрузки характеризует...

А. точную предельную нагрузку любой реальной детали; Б. потерю устойчивости в принятой идеализированной постановке; В. только предел текучести материала.

T15

Связь частоты f и круговой частоты ω имеет вид...

А. $f = 2\pi\omega$; Б. $f = \omega^2$; В. $f = \omega/(2\pi)$.

T16

Уменьшение временного шага при неизменной сетке проверяет...

А. чувствительность временного решения к дискретизации по времени; Б. только точность геометрической модели; В. наличие всех материальных параметров.

Ключ для преподавателя: T1 — А; T2 — Б; T3 — В; T4 — А; T5 — Б; T6 — В; T7 — А; T8 — Б; T9 — В; T10 — А; T11 — Б; T12 — В; T13 — А; T14 — Б; T15 — В; T16 — А.

Предлагаемая интерпретация: 14–16 баллов — высокий уровень; 11–13 — достаточный; 8–10 — пороговый; 0–7 — требуется повторная подготовка. Тест не заменяет расчёт и защиту модели.

7 Контрольные работы и расчётно исследовательское задание

KP1 Линейная статическая задача

Проводится после лекции 8 в рамках текущего контроля. Комплект: задание 31 — 10 баллов; два вопроса В10 и В23 — по 5 баллов. Всего 20 баллов. Предлагаемая продолжительность — 60 минут в пределах выделенной на контроль части учебного занятия. Для вопросов применяется шкала 0–5, для задачи — шкала 0–10 раздела 9. Учебный порог — 10 из 20 при не менее 5 из 10 за расчёт.

КР2 Специальные задачи МКЭ

Проводится после лекции 16. Комплект: 34 — 10 баллов; частотная часть 38 — 10 баллов. Всего 20 баллов, продолжительность 60 минут. Проверка временной схемы из 38 выполняется отдельно в ПР16. Учебный порог — 10 из 20, при этом каждая задача должна быть оценена не менее чем на 4 балла. Программная реализация не требуется: разрешён обычный калькулятор.

Для параллельных вариантов преподаватель может менять положительные значения длин, площадей, жёсткостей и масс, сохраняя тип задачи. До выдачи новых вариантов необходимо пересчитать ключи. Приведённые численные ответы относятся только к исходным данным этого комплекта.

РИЗ Проверка конечно элементной модели детали

Постройте линейную упругую модель гладкой пластины с центральным круглым отверстием: длина 200 мм по x , ширина 100 мм по y , толщина 2 мм, радиус отверстия 10 мм; $E = 210000$ МПа, $\nu = 0,3$. На торцах $x = \pm 100$ мм задайте наружные равномерные растягивающие напряжения 10 МПа. Остальные кромки свободны. Используйте полную плоскую модель и минимальные связи для исключения движений жёсткого тела: $u_x = u_y = 0$ в точке $(-100; 0)$, $u_y = 0$ в точке $(100; 0)$. Примите координатное начало в центре отверстия. Эти связи совместимы с симметрией выбранного нагружения; их влияние на локальные поля у точек связи следует исключить из анализа концентрации.

Для не менее трёх сеток с локальным уточнением у отверстия представьте число элементов, оценку качества, относительное перемещение торцов по точкам $(-100; 0)$ и $(100; 0)$, σ_x в фиксированной точке $(0; 15)$ мм, окружное напряжение у отверстия в точке $(0; 10)$ мм и баланс сил. Вычисляйте величины одним и тем же способом на всех сетках. Приложите исходные файлы; обоснуйте выбранный элемент и плоское напряжённое состояние. Сравните с номинальным напряжением и поясните, почему коэффициент 3 для бесконечной пластины нельзя безусловно требовать от данной конечной геометрии.

Проверочный ориентир для преподавателя: сила на каждом нагруженном торце по модулю $10 \cdot 100 \cdot 2 = 2000$ Н; алгебраическая сумма внешних сил равна нулю. Реакции минимальных связей при корректной постановке близки к нулю в пределах численной погрешности. Число элементов и локальные напряжения заранее не фиксируются: оцениваются сходимость и корректность модели. Учебный критерий стабилизации двух последовательных результатов — не более 3 % по каждой выбранной величине; при невыполнении требуется дальнейшее исследование, а не подгонка ответа.

Оценивание РИЗ — по шкале практической работы раздела 9, максимум 20 баллов. Критерий 3 % принят только для этого учебного задания и не является нормативным допуском инженерного проектирования.

8 Промежуточная аттестация

Зачёт в 7 семестре по принятому допущению

Предлагаемый формат: два вопроса по лекциям 1–8, по 5 баллов, и одна задача 31, 32 или 33, 10 баллов. Подготовка — 30 минут, собеседование — до 10 минут; окончательный регламент определяется расписанием. «Зачтено»: не менее 10 из 20, не менее 2 за каждый вопрос и не менее 5 за задачу. Иначе — «не зачтено». Выполнение текущих работ учитывается в соответствии с локальным порядком; автоматический недопуск по этому проекту ФОС не вводится.

Экзамен в 8 семестре по принятому допущению

Билет: один базовый вопрос из В1–В24, один вопрос из В25–В48 и одна задача из 34–38. Теория — по 5 баллов, задача — 10 баллов; максимум 20. В каждом билете проверяются теория, расчёт и объяснение достоверности. Предлагается 40 минут подготовки и до 15 минут ответа. При включении полного 38 время подготовки рекомендуется увеличить до 60 минут либо использовать только частотную часть и один вопрос о временной проверке.

Билет Базовый вопрос Специальный вопрос Задача

1 В8 В31 34

2 В11 В35 35

3 В17 В38 36

4 В23 В42 37

5 В24 В43 38, частотная часть

Предлагаемая шкала: 17–20 — «отлично», 14–16 — «хорошо», 10–13 — «удовлетворительно», 0–9 — «неудовлетворительно». Дополнительно для положительной оценки необходимы не менее 2 баллов за каждый теоретический вопрос и не менее 5 за задачу; если хотя бы одно условие не выполнено, итог — «неудовлетворительно» независимо от суммы. Текущие баллы и экзаменационные баллы не складываются автоматически; порядок их учёта устанавливает КРСУ.

9 Критерии оценивания

Теоретический ответ от 0 до 5 баллов

Балл Признаки ответа

5 Верные определения и зависимости; допущения, область применимости и проверочный пример раскрыты; ответ самостоятельный.

4 Основное содержание верно; есть небольшая неточность, исправляемая после уточнения; смысл формул объяснён.

3 Базовая логика верна, но вывод или область применимости раскрыты неполно; требуются наводящие вопросы.

2 Понимает минимальные понятия и физический смысл; не может полностью обосновать алгоритм или ограничения.

1 Приводит отдельные термины без связного объяснения; имеются существенные ошибки.

0 Ответ отсутствует или неверен по существу.

Расчётное задание от 0 до 10 баллов
Критерий Максимум
Правильная постановка и допущения 2
Верные уравнения или матрицы и граничные условия 3
Вычисления, знаки и единицы 3
Проверка и интерпретация результата 2
Итого 10

Каждый критерий оценивается целым числом от нуля до его максимума. Описка без изменения метода снижает только критерий вычислений; одна первичная ошибка не штрафует повторно в каждом последующем действии. При 33 вместо матриц оценивается метод сравнения сеток; при 35 — уравнение итерационного шага; при 36 — контактный закон. Для 38 шкала применяется к выданной преподавателем части задания.

Практическая работа и РИЗ от 0 до 20 баллов
Критерий Максимум
Обоснование расчётной схемы, допущений и элемента 4
Корректность материала, единиц, нагрузок, связей и сетки 4
Получение и представление результата 4
Проверка равновесия, эталона или сходимости 4
Воспроизводимость файлов и самостоятельная защита 4
Итого 20

Для каждого критерия: 4 — полностью выполнен и объяснён; 3 — выполнен с небольшой неточностью; 2 — выполнен частично, основная логика верна; 1 — существенные ошибки; 0 — результат отсутствует или не соответствует критерию. Учебный порог — 10 из 20 при не менее 2 баллах за корректность данных и модели, проверку и самостоятельную защиту. Ошибка единиц, необоснованные закрепления, неверная постановка или отсутствие осмысленной проверки требуют исправления расчёта. Преподаватель указывает, какой критерий не выполнен, и назначает повторную защиту по локальному порядку. Сам факт появления правдоподобной цветовой карты не подтверждает достижение результата.

10 Организация оценивания и фиксации результата

Для текущего опроса выбираются вопросы по уже пройденным лекциям. Тест Т1–Т8 можно использовать после 7-го семестра, Т9–Т16 — после соответствующих тем 8-го. Для полного теста рекомендуется 20 минут, для половины — 10 минут. При изменении числа вопросов пороги пересчитываются и сообщаются до начала работы.

При ручных расчётах допускаются конспект формул без готовых решений и непрограммируемый калькулятор; условия использования справочных материалов преподаватель объявляет заранее и одинаково для всех. При защите вычислительных работ студент предъявляет входной файл или скрипт и объясняет ключевые настройки. Допускаемое ПО выбирается из реально доступных в вузе средств.

Результат фиксируется в ведомости: студент; дата; код работы или билета; баллы по критериям; сумма; выполненные пороги; решение; краткая обратная связь. В протоколе РИЗ дополнительно фиксируются контролируемые величины, сетки и результат сравнения. Имена студентов, преподавателей и номера групп в комплекте не вымышлены.

Перед утверждением ФОС необходимо подтвердить формы аттестации по семестрам, официальные индикаторы ПК-2, локальную шкалу и доступное ПО. При появлении утверждённых индикаторов рабочие Р1–Р4 сопоставляются с ними без изменения фактического содержания проверяемых действий.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Устный опрос и собеседование по расчётной модели, предпосылкам и результатам.
Тематические тесты по постановке задач, функциям формы, матрицам и интерпретации решения.
Расчётные задания с ручной или программной сборкой небольшой системы.
Отчёты и защита практических работ с предъявлением исходных файлов расчёта.
Контрольные работы по линейной статике и специальным задачам МКЭ.
Расчётно-исследовательское задание по сеточной сходимости и проверке результата.
Вопросы и практическое задание для зачёта в 7-м семестре, экзаменационные билеты в 8-м семестре — при утверждении предложенных форм аттестации.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
ЛП.1	Тухфатуллин Б.А.	Численные методы расчета строительных конструкций. Метод конечных элементов (теория и практика): учебное пособие	Томск: Изд-во Томского гос. архит.-строит. ун-та 2013

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
ЛП.2	Калиткин Н.Н.	Численные методы: учебное пособие	Спб.: БХВ-Петербург 2014

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
--	---------------------	----------	-------------------

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
ЛЗ.1	Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.	Численные методы: учебник	М.: БИНОМ. Лаборатория знаний 2015

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	1 Python с NumPy SciPy и Matplotlib
6.3.1.2	Учебная реализация стержневого МКЭ, сборка разреженных матриц, решение систем и задач на собственные значения, построение графиков сходимости. Документация: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.linalg.html .
6.3.1.3	2 CalculiX
6.3.1.4	Конечно-элементный решатель для учебных задач механики конструкций; CGX может использоваться для подготовки и просмотра моделей. Открыто распространяемый комплекс. Документация: https://www.dhondt.de/ .
6.3.1.5	3 Gmsh
6.3.1.6	Генерация одномерных, поверхностных и объёмных сеток, задание групп геометрии и контроль сеточной модели. Совместимость форматов с решателем проверяется для выбранного маршрута. Документация: https://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html .
6.3.1.7	4 Ansys Mechanical в составе доступной учебной поставки
6.3.1.8	Графическая подготовка и решение задач статики, устойчивости и динамики при наличии соответствующих модулей. Возможность использования Ansys Student, условия доступа и ограничения размера моделей проверяются по официальной странице: https://www.ansys.com/academic/students/ansys-student .
6.3.1.9	5 COMSOL Multiphysics с Structural Mechanics Module
6.3.1.10	Альтернативная среда для линейных и нелинейных задач механики и термоупругости; требуется лицензия на нужные модули. Официальное описание: https://www.comsol.com/structural-mechanics-module . Используется как альтернатива основному CAE-комплексу.

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Профессиональные базы данных и научные платформы
6.3.2.2	1. Math-Net.Ru — поиск публикаций по вычислительной математике, механике и численным методам. https://www.mathnet.ru/ . Назначение портала подтверждается публикацией его разработчиков [9]; текущая доступность сайта при проверке не подтверждена.
6.3.2.3	2. Springer Nature Link — научные статьи и книги по вычислительной механике и МКЭ. https://link.springer.com/ . Доступ к отдельным полным текстам зависит от открытой лицензии или подписки.
6.3.2.4	3. eLIBRARY.RU — поиск российских научных публикаций по механике и инженерным расчётам. https://elibrary.ru/ . Страница при проверке вернула ограничение доступа; конкретный состав и доступность полных текстов для КРСУ не подтверждены.
6.3.2.5	Информационные справочные системы по МКЭ
6.3.2.6	1. Официальная документация CalculiX: описания элементов, материалов, типов расчёта, входных данных и проверочных примеров. https://www.dhondt.de/ .
6.3.2.7	2. Gmsh Reference Manual: геометрия, сетки, группы физических сущностей и экспорт. https://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html .
6.3.2.8	3. SciPy Reference Guide: разреженные матрицы, линейные системы и собственные значения. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.linalg.html .

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Порядок выполнения практической работы

1. Прочитайте условие и составьте эскиз. Укажите геометрию, материал, систему единиц, нагрузки, связи и величины, которые должны быть получены.
2. Выберите физическую постановку и тип элементов. Обоснуйте упрощения, симметрию и исключённые из модели эффекты.
3. Задайте единицы согласованно. Например, для системы Н–мм–с модуль упругости имеет единицы Н/мм², а плотность — Н·с²/мм⁴; числовое значение плотности нельзя переносить из кг/м³ без пересчёта.
4. Проверьте сетку, связность, ориентацию и назначение свойств. До запуска решателя убедитесь, что устранены только необходимые движения жёсткого тела.
5. Выполните расчёт и изучите сообщения решателя. Зафиксируйте реакции, перемещения и напряжения; в нелинейной задаче — шаги нагружения и критерии сходимости.
6. Проверьте равновесие и размерности, сравните с аналитической оценкой. При изменении сетки сравнивайте одну и ту же физическую величину в одной области.
7. Сохраните входные данные, параметры решателя и результаты. Сформулируйте вывод о применимости модели и

причинах расхождения с проверочным решением.

Самостоятельная работа и использование источников

Выполняйте СР после соответствующей лекции и до защиты связанной практической работы. Для теоретического вопроса подготовьте краткое объяснение и один расчётный пример. Для вычислительного исследования изменяйте один параметр при неизменных остальных условиях; сохраняйте таблицу вариантов и выводы.

В документации программы находите описание именно выбранного элемента и типа анализа. Указывайте название программы, версию, материал, единицы и основные настройки. Материалы MIT полезны для теории, документация — для проверки доступных функций и интерпретации настроек. Перевод англоязычного фрагмента проверяйте по обозначениям, формулам и физическому смыслу.

Отчёт и подготовка к защите

Рекомендуемая структура отчёта: условие и эскиз; исходные данные с единицами; допущения; тип элементов и сетка; нагрузки и связи; настройки решения; результаты; проверка; выводы; источники. Для воспроизводимости приложите модель, входной файл или скрипт. Скриншоты должны содержать название величины и единицы, а масштаб изображения деформации должен быть указан.

На защите объясните, почему выбрана модель, как приложена нагрузка, какие связи заданы и чем подтверждён результат.

Будьте готовы изменить один параметр и предсказать направление изменения решения. Перед аттестацией решите вручную небольшую стержневую систему, восстановите реакции, проверьте термоупругий пример и поясните смысл собственных значений.

Типичные ошибки и способы проверки

Не заменяйте физическое крепление произвольным полным защемлением; проверьте, не завышена ли жёсткость. Не считайте сообщение «решение завершено» доказательством правильности. Не сравнивайте усреднённое узловое напряжение с напряжением в точке интегрирования без пояснения. Не используйте пик у сингулярности как единственный критерий сходимости. Для динамики и устойчивости проверяйте плотность, единицы, предварительное нагружение и физический смысл найденных форм.